均分田地，田埂最短问题

数学研发论坛，gxqcn 编辑整理

摘要：对一个有限平面区域，进行面积等分，要求分界线总长最短。本文整理了论坛对该问题的交流的关键点，以及形成的最终结论，引导大家思考这类问题。

关键词：等面积划分；长度最短

0 前言

2013 年快结束了，突然间，流行个热词——“土豪”，并争相与其做朋友。而一个世纪前（甚至更久远），大家的心声则是“打倒土豪，分田地”！

三年多前，数学研发论坛，也曾轰轰烈烈地举行了一场“土地改革”运动。但在数学爱好者眼里，总喜欢把问题复杂化（最终仍是为了简单化），但却更有趣了：要求每户分得地块面积严格相等；要求各户间地块间界定的田埂总长最短。这与当今提倡的“公平公正”、“厉行节约”的口号是多么的贴切啊。

1 问题描述

有一块田地需要分给 n 户，要求各户分得面积相等，田地内部不同户分得的区域将建田埂以分隔（原待分地块已有田埂圈定）。现为实现耕地面积最大化，要求新建田埂总长度最小。请问如何规划？

注：

1、分后新修的田埂对所分面积均等性的影响忽略不计；

2、允许“孤立”田埂的出现，如内部可出现一个“圆田埂”；

3、允许各户分得的田地不连通，即块数可以不止一块。

2 特例分析

曾有一道趣题：求正三角形均分面积的最短曲线？

方法是：将其绕某个顶点翻转复制几下，最终可得一个大的正六边形，以其中心为圆心作一个圆，使其面积正好为正六边形面积的一半。则该圆落在原正三角形内的圆弧即为所求。

这是利用了：面积一定，周长最短为圆的原理。

而涉及到长度最短问题，大家肯定更熟悉这个定理：“两点之间线段最短”。

所以我们可初步选定：通过线段、圆弧搭配来解决这个问题。

对于单位正方形，二等分很容易；三等分、四等分容易构造出来吗？哪个更容易？

咱们还是先从三等分情形开始吧。。。

方案一、如**图 1**，横切一刀，将正方形划面积分成 1:2，再对较大块中间竖切一刀，全长为：$5/3 = 1.666666\cdots$；

方案二、如**图 2**，将那条水平切线折断成两部分，中间那道竖线段长度为：$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{15}}{60}$，全长为：$\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{15}}{4} = 1.634912\cdots$

方案三、如**图 3**，再将两条折线演变成两段圆弧，使其在交汇处切线夹角为 120°，另一端与边界垂直（这是半径为 1，弧度为 30° 的圆弧），中间那道竖线段长度为：$\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$，全长为：$\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6} = 1.623278\cdots$

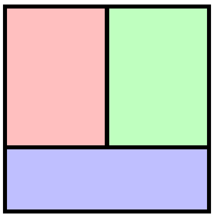

图 1 方案一

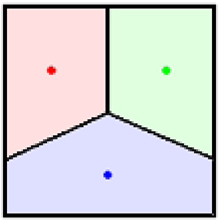

图 2 方案二

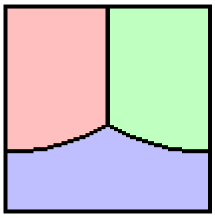

图 3 方案三

方案一是仅用两条直线段分割所能达到的长度总和最小方案；**方案二**则是仅以直线段分割所能达到的长度总和最小方案；**方案三**则是允许以任意曲线分割中所能达到的长度总和最小方案。上面是其演化过程。

三等分解决了，四等分还不简单？不就是在二等分基础上再等分吗？一个标准的“**田**”字不就解决了吗？想当初笔者也曾这么想当然。如果您也这么认为，那就大错特错了，请看**图 4**，居然可以让新界线总长缩短到 2.0 以下，达到了：1.975592……

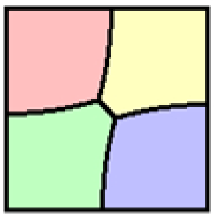

图 4 四等分

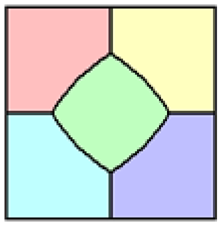

图 5 五等分

再到 n=5 的情形，如**图 5**，中间的“四边形”其实是四段 30° 的弧。其新界线全长为：2.502112……

欲知如此“怪异”奇妙的曲线是如何构造出来的？请听下回分解。。。

3 微观分析

最佳划分可以通过微观调整逐渐逼近，KeyTo9_Fans 总结出了以下几个基本原则：

微调原则一、曲线中间没有尖角。
如果曲线中间有尖角 O，我们可以在 O 点附近找两个点 A、B 连起来。如**图 6** 所示：

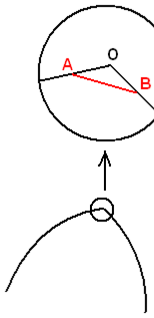

图 6 消除尖点

造成的面积差异可通过旋转三角形 AOB 外的曲线弥补。
于是调整后仍然满足平分面积的条件，但是总长度缩短了。

微调原则二、与直线边界相接的地方垂直边界。
如果不垂直边界，我们可以在边界附近找一个点 A，作 A 与边界的垂线。如**图 7** 所示：

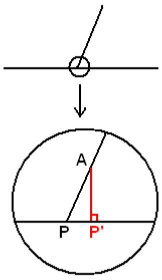

图 7 垂直边界

造成的面积差异可通过旋转三角形 APP'外的曲线弥补。
于是调整后仍然满足平分面积的条件，但是总长度缩短了。

微调原则三、内部曲线的交角为 120 度。
理论依据是：设△ABC，最大的角小于 120 度。
在三角形内部找一个点 P，使得|PA|+|PB|+|PC|最小，
那么∠APB=∠BPC=∠CPA=120°。

如**图 8** 所示，如果 3 条曲线的交角不是 120 度，我们总可以调整成 120 度。

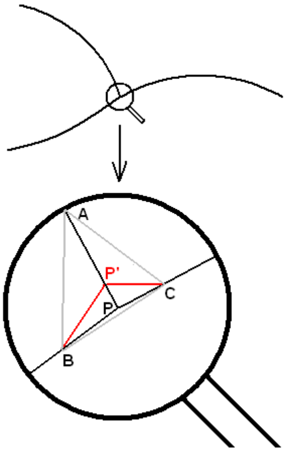

图 8 调整夹角成 120°

造成的面积差异可通过旋转三角形外的曲线弥补。
于是调整后仍然满足平分面积的条件，但是总长度缩短了。

微调原则四、界线只能是直线段或圆弧。
其证明，hujunhua 甚至借鉴了结晶学理论（见 原帖 23#）。

4 结论总结

最短田埂问题，需满足如下原则：

i. **分界线为圆弧；**
ii. **分界线同边界垂直；**
iii. **内部分界互成 120 度；**
iv. **内部分界处有向曲率和为零。**

解读：

1、 关于第 i 点，线段可以看成圆弧的退化情况；
2、 关于第 ii 点，接触的边界需是光滑的（比如，两等圆相交构成区域进行二等分，最佳方案即是公共弦，而公共弦是不存在“垂直边界”之说的，因为其端点正好是边界上的拐点）；
3、 关于第 iii 点，在内部，最多三个不同的分界线共点，这时必然两两夹角相等；
4、 关于第 iv 点，圆弧的有向曲率的方向可看作从交汇点出发，是沿顺时针还是逆时针弯曲。如果其中一条是直线段，则其有向曲率为 0，而另外两个圆弧必须半径相等且方向相反。

具体证明，请看 原帖 59#、原帖 61#，里面有大神 mathe 的精彩推演证明过程（实际上这是本问题最出彩的部分），限于篇幅，不再赘述。

这为我们构造最佳方案提供了一套指导性的判定及修正方法。比如说，要对一个正五角星面积五等分，怎么做？将五个内顶点均与中心连结，感觉已足够短了，但肯定不是最佳方案，因为它破坏了原则 iii，在 原帖 64# 里 mathe 给出了更优的方案：

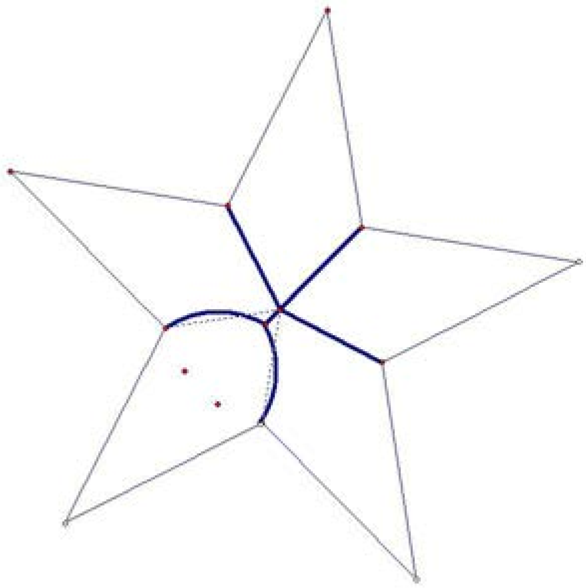

图 9 五等分正五角星的优化方案

但具体如何构造还是很费脑筋。比如，我们之前曾得到了对正方形 n=2,3,4,5 等分的最佳方案，到 n=6 时就变得非常复杂了，至今仍不清楚。

相对来说，毗邻边界小区域比内部小区域的边界线构造更困难。当 n 足够大时，内部肯定出现“蜂窝”状，甚至局部出现“蜂窝状”，因为等角六边形的几个内角全部是 120°，正好符合上述原则。

一个新问题：对于某个固定的待份地块，逐步加大等分区域数 n，内部出现“等角六边形”的最小 n 是多少？

5 推广扩展

这个问题吸引了众多高手的参与，从个例到一般性解答，最终比较圆满地解决了。

上面我们讨论了平面情形，那推广到球面呢？这在数学研发论坛上已有探讨。

再扩展到立体情形：如果要将一个立体按体积等划分成若干个小区域，请问用于界定边界的面积总和最小的方案是什么？当划分区域数足够多时，也许我们可以从勤劳的蜜蜂那里得到启发。

6 参考文献

[1] 均分田地，田埂最短问题
[2] 直线均分田地的最短问题
[3] 田埂最短问题的逆问题
[4] 球面上的田埂