数学悖论

数学研发论坛 rayfekeeper 编辑整理

当你听到数学悖论这个词，你肯定第一感觉就是理发师悖论：某村只有一人理发，且该村的人都需要理发，理发师规定，给且只给村中不自己理发的人理发。试问：理发师给不给自己理发？如果理发师给自己理发，则违背了自己的约定；如果理发师不给自己理发，那么按照他的规定，又应该给自己理发。这样，理发师陷入了两难的境地。这个悖论是罗素在 1903 年提出来的，于是也叫罗素悖论。其实数学中的悖论也远不止一个，我仅在此文中罗列三个比较知名的数学悖论，并附上一些解决方案与最新进展。

罗素悖论

罗素理发师悖论（以后都简称罗素悖论）用数学语言可以简单描述成这样，$A=\{x|x\notin A\}$，诡异的是，A 定义的是所有不属于 A 的元素的集合，于是不属于 A 的元素按照集合的定义就能得到它是该集合的元素，如果它是该集合的元素，根据定义又能得到它不应该是集合的元素，让人进退两难。正是因为罗素悖论，引发了第三次数学危机。

1874 年，康托尔创立了集合论，很快渗透到大部分数学分支，成为它们的基础。到 19 世纪末，全部数学几乎都建立在集合论的基础之上了。当人们都以为集合论完美无瑕时，罗素悖论的提出，直接终结了集合完美的梦想，甚至数学的基础都被动摇了。

为了挽救集合论，数学家们纷纷提出自己的解决方案。人们希望能够通过对康托尔的集合论进行改造，通过对集合定义加以限制来排除悖论，这就需要建立新的原则。“这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾;另一方面又必须充分广阔,使康托尔集合论中一切有价值的内容得以保存下来。”解决这一悖论在本质上存在两种选择，the Zermelo-Fraenkel alternative （ZF 选择公理）和 the von Neumann-Bernays alternative（NBG 选择公理）。

1908 年，策梅罗（Ernst Zermelo)在自己这一原则基础上提出第一个公理化集合论体系，后来这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托尔朴素集合论的缺陷。这一公理系统在通过 Abraham Fraenkel 的改进后被称为 Zermelo-Fraenkel(ZF) axioms。在该公理系统中，由于限制公理(The Axion Schema of Comprehension 或 Subset Axioms)：P(x)是 x 的一个性质，对任意已知集合 A，存在一个集合 B 使得对所有元素 $x\in B$ 当且仅当 $x\in A$ 且 P(x)；因此{x | x 是一个集合}并不能在该系统中写成一个集合，由于它并不是任何已知集合的子集；并且通过该公理，存在集合 A={x | x 是一个集合}在 ZF 系统中能被证明是矛盾的，因此罗素悖论在该系统中被避免了。

除 ZF 系统外，集合论的公理系统还有多种，如冯·诺伊曼（von Neumann)等人提出的 NBG 系统等。在 the von Neumann-Bernays alternative 中，所有包含集合的 collection 都能被称为类(class)，因此某些集合也能被称为 class，但是某些 collection 太大了(比如一个 collection 包含所有集合）以至于不能是一个集合，因此仅仅是个 class。这同样也避免了罗素悖论。

芝诺悖论

芝诺悖论——阿基里斯与乌龟：公元前 5 世纪，芝诺用他的无穷、连续以及部分和的知识，引发出以下著名的悖论：他提出让阿基里斯与乌龟之间举行一场赛跑，并让乌龟在阿基里斯前头 1000 米

开始。假定阿基里斯能够跑得比乌龟快10倍。比赛开始，当阿基里斯跑了1000米时，乌龟仍前于他100米；当阿基里斯跑了下一个100米时，乌龟依然前于他10米……所以，阿基里斯永远追不上乌龟。

这些悖论由于被记录在亚里士多德的《物理学》一书中而为后人所知。芝诺提出这些悖论是为了支持他老师巴门尼德关于“存在”不动、是一的学说。这些方法可以用微积分（无限）的概念解释，但还是无法用微积分解决，因为微积分原理存在的前提是存在广延(如，有广延的线段经过无限分割，还是由有广延的线段组成，而不是由无广延的点组成。)，而芝诺悖论中既承认广延，又强调无广延的点。这些悖论之所以难以解决，是因为它集中强调后来笛卡尔和伽桑迪为代表的机械论的分歧点。这些悖论其实都可以简化为：1/0=无穷。

芝诺悖论揭示的是事物内部的稠密性和连续性之间的区别，是无限可分和有限长度之间的矛盾。上述悖论和关于运动的前三个悖论的共同点，在于假定了空间、时间和物体的无限可分性，实际上还讨论了无穷小和连续性。芝诺在这里其实还援引了如下两个假设：

i) 无限多个相等的任意小的正量的总和必然是无穷大；

ii) 无限多个没有大小的量的总和仍然是没有大小的量。

其中假设 ii)是芝诺反对把线段(时间、空间)看成是一个无限点集(无限多个没有大小的量的总和)的主要依据。因此解决芝诺悖论的一个关键就是证明假设 ii)不成立。A·格兰巴姆(Grünbaum)于 1952 年详尽地讨论了这个问题。他把只含有一个点的子区间定义为退化子区间，从而得出下列结论：

1)有限区间(a，b)是退化子区间的连续统的并集；

2)每个退化子区间的长度是零；

3)区间(a，b)的长度是b—a；

4)一个区间的长度不是它的基数的函数。

可以看出，芝诺的假设 ii)是不能成立的。建立在假设之上的芝诺悖论当然也会坍圮。

无限悖论

这是一个与无限有关的悖论：{1，2，3，4，5，…}是自然数集： {1，4，9，16，25，…}是自然数平方的数集。 这两个数集能够很容易构成一一对应，那么，在每个集合中有一样多的元素吗?

如果学过实变函数论的同学你们肯定会发现，用康托尔势对等的概念来解释这个问题就很简单了，它们当然含有一样多的元素，因为它们之间存在一个一一映射 f:n→n^2,也就是说这两个集合拥有相等数量的元素。但是对于一般人来说，是难以理解的，显然后面的集合是前面集合的子集，而且前面集合还有不含于后面集合的元素，说到这里，我只能把这个问题的根刨出来，这其实牵涉到连续统假设，一个著名的希尔伯特问题，即：在可数集基数和实数集基数之间没有别的基数，即著名的连续统假设。这个问题最终的解决方案是，在目前 ZFC 公理系统下是无法判定真伪的。也就是说，如果你承认连续统假设，这个问题的答案就是一样多，若不然，他们就不相等。

悖论（paradox，也称逆论，反论），是指一种导致矛盾的命题。 悖论(paradox)来自希腊语“para+dokein”，意思是“多想一想”。这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。 悖论是自相矛盾的命题。即如果承认这个命题成立，就可推出它的否定命题成立；反之，如果承认这个命题的否定命题成立，又可推出这个命题成立 如果承认它是真的，经过一系列正确的推理，却又得出它是假的；如果承认它是假的，经过一系列正确的推理，却又得出它是真的。 古今中外有不少著名的悖论，它们震撼了逻辑和数学的基础，激发了人们求知和精密的思考，吸引了古往今来许多思想家和爱好者的注意力。解决悖论难题需要创

造性的思考，悖论的解决又往往可以给人带来全新的观念。 悖论有三种主要形式。 1. 一种论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的（佯谬）。 2. 一种论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了（似是而非的理论）。 3. 一系列推理看起来好像无懈可击，可是却导致逻辑上自相矛盾。 悖论主要有逻辑悖论、概率悖论、几何悖论、统计悖论和时间悖论等。

上面的这段文字引自数学研发论坛，更多的数学悖论请登陆网页查看。http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=110。总而言之，悖论不是阻碍数学发展的绊脚石，反而加快了数学发展的进程，它使得数学更加严密紧凑。