椭圆中的几何问题

关于平面几何中椭圆的几何问题在相关的文献中结果很少，由于对于一般问题需涉及大量的计算。就算得到了结果，也不好记忆和使用。

在数学研发论坛上，我们讨论了几个比较难且比较有趣的问题，现精选其中比较有趣的结论做一下简单介绍(为了不引起混淆本文中对网页上的符号作了统一处理)

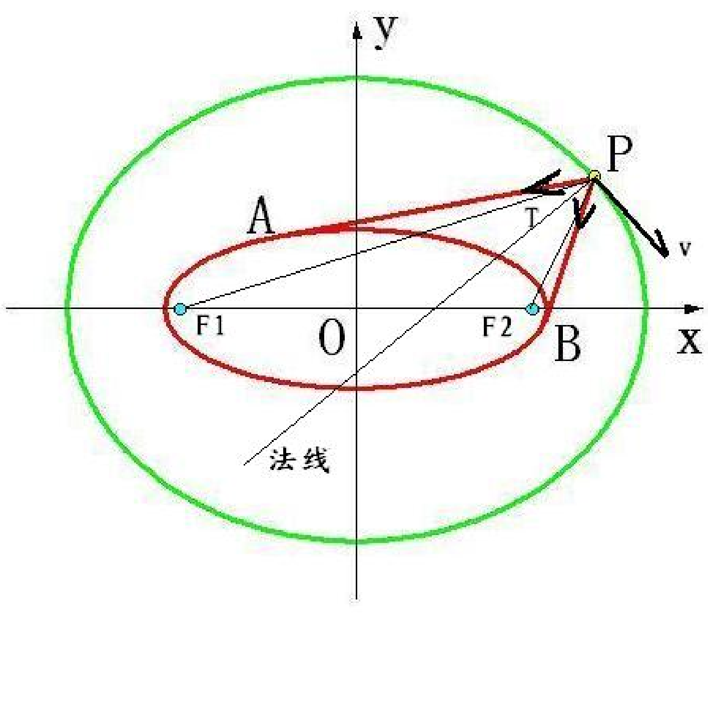
定理 A1: 用一根比椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的周长长一些的细绳圈套在该椭圆上，另用一个张紧微轮 P 将绳子绷直的两段分别与椭圆相切于 A,B 处。当小轮在绳子上滚动时，则其轨迹是与原椭圆共焦点的椭圆。

根据 kastin 介绍：

Graues 定理 A2：同焦点椭圆上一点与另一椭圆两条切线段长度之和减去切线所夹椭圆弧长的值是个常数。

庞斯莱闭包定理 A3：C 和 D 是圆锥曲线，若有一 k 边形既内接于 C 又外切于 D，则对于 C 上任一点 P，必有一 k 边形既内接于 C 又外切于 D

zgg_利用物理原理给出了一个非常有趣的解释：



分析 P 点的受力状况，由于它只受到绳子的张力 T 且大小恒定。所以合成的力总是沿着角 APB 的角平分线（即法线方向），即 P 点的运动方向将垂直于法线。又根据椭圆外一点向椭圆两焦点的张角同角平分线，所以它们共法线了。既然它们在 P 点的运动方向总是一致的，那么它的轨迹就是椭圆了。

关于计算，我们有设

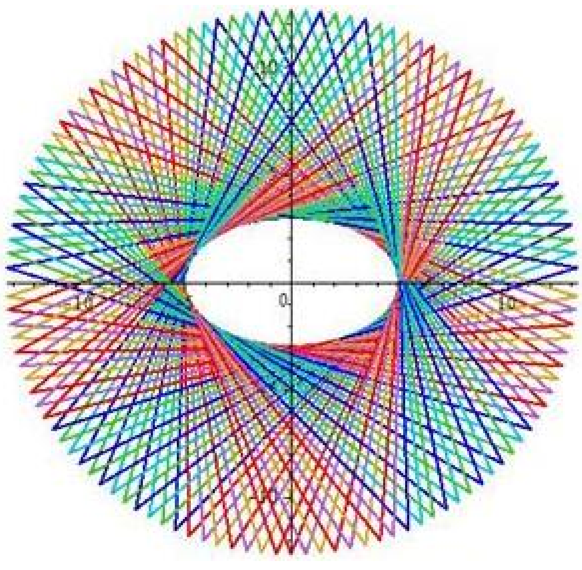
设内椭圆为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，外椭圆为$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$，且 $a^2-b^2=m^2-n^2$，则

取两个顶点 $(a,0),(0,b)$ 计算，则有

$$L=\int_0^{2\pi} a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})} a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx+\frac{2n\sqrt{m^2-a^2}}{m}$$

$$L=\int_0^{2\pi} a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-2\int_{\arcsin(\frac{b}{n})}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx+\frac{2m\sqrt{m^2-a^2}}{n}$$

取 $L=40,\mathrm{a}=5,\mathrm{b}=3$，我们计算得 $m=13.26652410,\ \mathrm{n}=12.6491368$，为了进一步验证在其余点是否也满足外椭圆方程：我们在外椭圆上取 120 个样本点，分别计算了 L 值均为 40，并画出下面轨迹图



利用第二类不完全椭圆积分的加法公式：

$$E(\mathrm{x};\mathrm{k})=\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$E(x_1;k)+E(x_2;k)=E(\arcsin\frac{\cos(x_2)\sqrt{1-k^2\sin(x_2)}\sin(x_1)+\cos(x_1)\sqrt{1-k^2\sin(x_1)}\sin(x_2)}{1-k^2\sin(x_1)^2\sin(x_2)^2};k)+$$

$$\frac{k^2\sin(x_1)^2\sin(x_2)\cos(x_2)\sqrt{1-k^2\sin(x_2)}+k^2\sin(x_1)\sin(x_2)^2\cos(x_1)\sqrt{1-k^2\sin(x_1)}}{1-k^2\sin(x_1)^2\sin(x_2)^2}$$

我们或许能给出一个代数证明：

Wayne 利用 MATHEMATICA 软件算出：对于内椭圆上的切点

$\mathrm{P}_i[a\cos(\theta_i),b\sin(\theta_i)]$，$i=1,2$ 绳长为 L 时，内椭圆上两切点的关系式，设

$0\le\theta_1\le\theta_2\le 2\pi$，有

$$\tan(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})\sqrt{\frac{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos(2\theta_1)}{2}}+\tan(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})\sqrt{\frac{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos(2\theta_2)}{2}}+$$

$$aE(\theta_2,1-\frac{b^2}{a^2})-aE(\theta_1,1-\frac{b^2}{a^2})=L$$

mathe 给出了一个用代数方法证明的途径，但未给出最终的手工证明

wayne 和 mathe 分别用 MATHEMATICA 和 Pari/Gp 程序给予验证计算，creasson 利用微分几何的方法给出一个新的证明（未完全写出），期望有人给出一个完美的证明！

更有趣的是，mathe 提出了一个一般性的问题：用长度固定的无弹性绳子套在一光滑闭图形上滑动，笔尖得出的光滑图形法向总是两绳子方向的角平分线，那么这个光滑闭曲线应该满足什么条件？若满足此条件，如何用数学符号给予一个精确而简洁的描述？这些问题都值得我们进一步思考！

有了定理 A,我们很容易得到下面有趣的定理：

光反射椭圆定理 B1:

内接于椭圆 C_1(周长为 L)的所有凸 k 边形中满足光反射性质的凸 k 边形

$A_1A_2...A_k$ 周长相等且均取最大值 L_0；更进一步只有一个与椭圆 C_1 共焦点的椭圆 C_2 与光反射凸 k 边形外切，依次切于点 $B_1,B_2,...,B_k$,则必成立：

$$\overline{A_iB_{i-1}}+\overline{A_iB_i}+\overset{\frown}{B_iB_{i-1}}=L+\frac{L_0-L}{k} \quad （0\le i\le k,且i为正整数）$$

注：$\overset{\frown}{B_iB_{i-1}}$ 为不含 A_i 的椭圆弧（可定义为椭圆优弧）长度

$A_0=A_k,B_0=B_k$,切点B_{i-1}位于A_{i-1},A_i之间。

$\overline{A_iB_{i-1}}$为A_iB_{i-1}的线段长。

有了上面的定理 B1：我们可解决椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 内接 k 边形的最大周长 $L(k)$ 问题?

在 http://219.239.238.41/thread-295026-1-1.html 中有很详细的讨论

并给出对椭圆内接 k 边形的结论:

P 是已知椭圆上的一点,以 P 为一顶点且内接于椭圆的 k 边形中,有且仅有一个周长最长的,记作 n(P),它由下面的 2 个等价的条件之一决定:

(1)n(P)的全部顶点都具有光反射特性.

(2)n(P)外切于某个与椭圆同焦点的另一个椭圆上.

关于凸体内接多边形的问题有两个经典的结论：

定理 B2 (Sas,1939) 给定平面上一个凸体 C , $k\ge 3$,设 P_k 表示一个内接于 C 的面积最大的 k 边形,则 $A(\mathrm{P}_k)\ge A(\mathrm{C})(\frac{k}{2\pi})\sin(\frac{2\pi}{k})$,等号成立仅当C是一个椭圆

定理 B3 (Schneider),设 C 是平面上的一个凸体， $k\ge 3$ ，设

$L(\mathrm{q}_k)$表示外切（内接）于C的周长最小（最大）的k边形，则

$\mathrm{L}(\mathrm{Q}_k)\le \mathrm{L}(\mathrm{C})(\frac{k}{\pi})\tan(\frac{\pi}{k})$； $\mathrm{L}(\mathrm{q}_k)\ge \mathrm{L}(\mathrm{C})(\frac{k}{\pi})\sin(\frac{\pi}{k})$

若 C 是一个椭圆，则两个不等式中的等号成立。

注：由于最大周长 k 边形必与另一个共焦点的内椭圆（设为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$）外切，且内接于

外椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 。

关于 $L(\mathrm{k})$ 的计算公式：现将结果摘抄如下

具体可见

http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=3740&extra=&page=5

对于 $k=3$

$$L(3)=2\sqrt{3}\frac{m^2+n^2+D}{\sqrt{m^2+n^2+2D}},D=\sqrt{m^4+n^4-m^2n^2}$$

$$a=m\frac{d^2-n^2}{m^2-n^2},b=n\frac{d^2-n^2}{m^2-n^2},d^2=\sqrt{m^4+n^4-m^2n^2}$$

$$L(3)=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-3*(2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-\frac{2n\sqrt{m^2-a^2}}{m})$$

对于 $\mathrm{k}=4$

$$L(4)=4\sqrt{m^2+n^2},\mathrm{a}=\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}},\mathrm{b}=\frac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$L(4)=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-4*(2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-\frac{2n\sqrt{m^2-a^2}}{m})$$

对于 $k=5$

$$(-m^6+3m^4n^2+n^6-3m^2n^4)\mathrm{a}^6+(4m^3n^4-6m^5n^2+2n^6\,\mathrm{m})\mathrm{a}^5+(7m^4n^4-4n^6m^2+3m^8-6m^6n^2)\mathrm{a}^4+(-12m^5n^4+12n^2m^7)\mathrm{a}^3+(-4m^6n^4-3m^{10}+3n^2m^8)\mathrm{a}^2+(-6n^2m^9+8m^7n^4)\mathrm{a}+m^{12}=0$$

$$(-m^6+3m^4n^2+n^6-3m^2n^4)\mathrm{b}^6+(6n^5m^2-2nm^6-4n^3m^4)\mathrm{b}^5+(-3n^8+4m^6n^2-7m^4n^4+6n^6m^2)\mathrm{b}^4+(-12n^7m^2+12n^5m^4)\mathrm{b}^3+(4n^6m^4-3n^8m^2+3n^{10})\mathrm{b}^2+(6n^9m^2-8n^7m^4)\mathrm{b}-n^{12}=0$$

$$(\mathrm{m}^{12}+n^{12}-20m^6n^6+15m^4n^8+m^2n^{10}+15m^8n^4-6m^{10}n^2)t^{12}+(6n^{14}-20m^6n^8+14m^8n^6+14m^2n^{12}+6m^{10}n^4-20m^4n^{10})t^{10}+(50m^4n^{12}+4m^2n^{14}-29m^8n^8+4m^6n^{10}-29n^{16})t^8+(36n^{18}-36m^2n^{16}+36m^6n^{12}-36m^4n^{14})t^6+(-9n^{20}+34m^2n^{18}-9m^4n^{16})t^4+(-10n^{22}-10m^2n^{20})t^2+5n^{24}=0$$

$$(-m^2+n^2)x_1^{\,2}-2n^2mx_1+m^4=0$$

$$(\mathrm{n}^4-2m^2n^2+m^4)y_1^{\,4}+(2m^2n^4+2n^6)y_1^{\,2}-3n^8=0$$

$$L(5)=2\sqrt{(\mathrm{m}+x_1)^2+y_1^{\ 2}}+2\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-t)^2}+2t$$

$$L(5)=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-5*(2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-\frac{2n\sqrt{m^2-a^2}}{m})$$

对于$k=6$

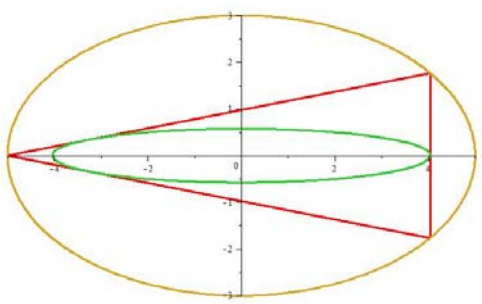
$$a=m\frac{\sqrt{m^2+2mn}}{m+n},\mathrm{b}=n\frac{\sqrt{n^2+2mn}}{m+n},L(6)=4(\frac{m^2+mn+n^2}{m+n})$$

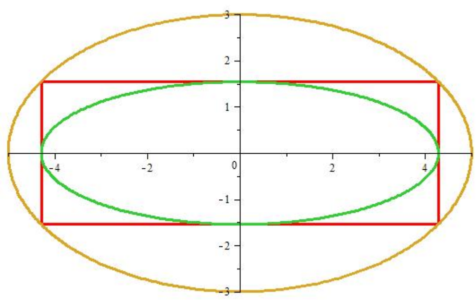
$$L(6)=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-6*(2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})}a\sqrt{1-\frac{(\mathrm{a}^2-b^2)\cos(\mathrm{x})^2}{a^2}}dx-\frac{2n\sqrt{m^2-a^2}}{m})$$

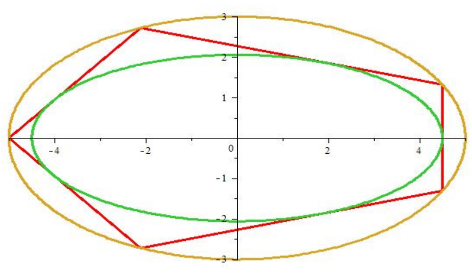
对于$k=3\sim8$可以参见

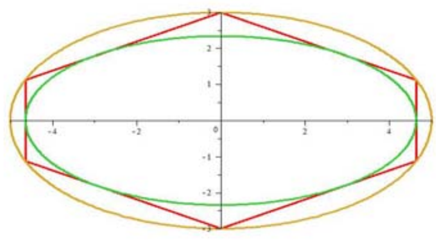
http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=3740&extra=&page=5

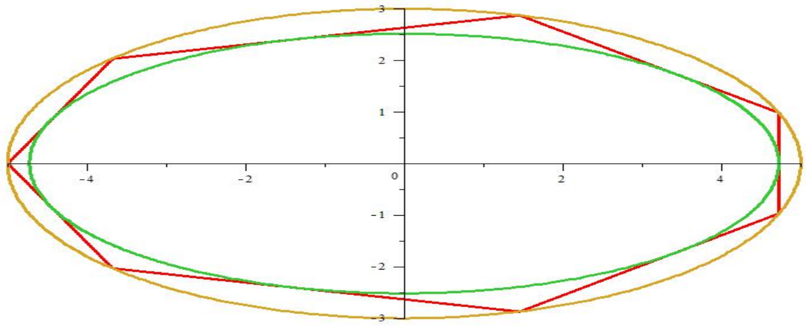
下面给出根据数值计算得到的例子：$k=3\sim8$

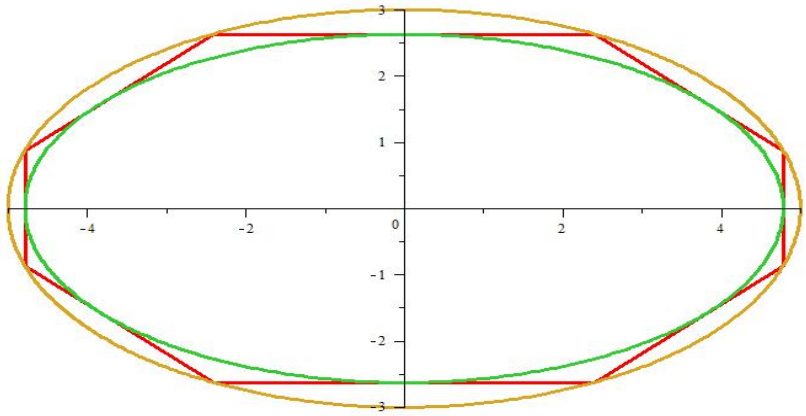












定理 B4: 对于椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 的内接凸 k 边形的最大周长 L(k):

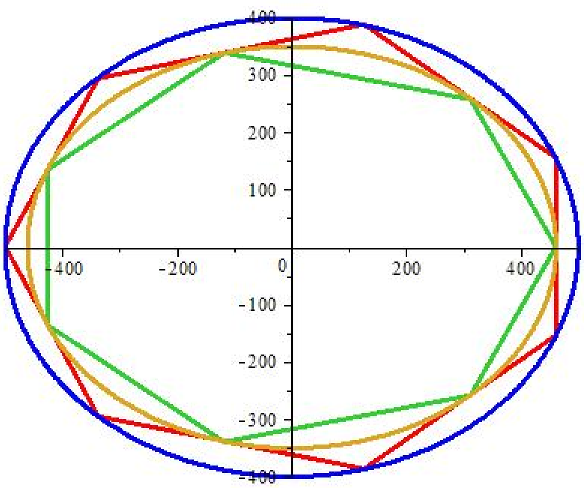
若设内接椭圆 C_1 的光反射 k 边形的外切椭圆 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$L(\mathrm{k}) = \mathrm{L}_0 - k(L_1 - L_2)$$
$$L_0 = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)\cos(x)^2}{a^2}}dx$$
$$L_1 = 2\int_0^{\arccos(\frac{a}{m})} a\sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)\cos(x)^2}{a^2}}dx$$
$$L_2 = \frac{2n\sqrt{m^2 - a^2}}{m}$$

为了更直观的检验此定理 B4 的正确性，我们给出 $k = 7$ 的数值计算结果：

$m = 500, n = 400$
$a = 461.2414144$, b=350.3478876
分别算出凸七边形的各个顶点及切点坐标
$A_1[-425.4872848,\ 135.2476400]$，$B_1[-500,\ 0]$
$A_2[-116.3881840,\ 339.0104432], B_2[-337.3392375,\ 295.2447000]$
$A_3[311.1896544,\ 258.5958921], B_3[126.1684024,\ 387.0557866]$
$A_4[461.2414141,\ 0], B_4[461.2414145,\ 154.4152481]$
$A_5[311.1896544,\ -258.5958921], B_5[461.2414145,\ -154.4152481]$
$A_6[-116.3881840,\ -339.0104432], B_6[126.1684024,\ -387.0557866]$
$A_7[-425.4872848,\ -135.2476400], B_7[-337.3392375,\ -295.2447000]$

$L = 2561.597460$
$L_0 = 2743.863770$
即$\overline{A_iB_{i-1}} + \overline{A_iB_i} + \overset{\frown}{B_iB_{i-1}} = L + \frac{L_0 - L}{7} = 2587.635504$
$1 \le i \le 7, A_0 = A_7, B_0 = B_7$



下面我们来讨论椭圆内接k 边形的最大面积问题$S(\mathrm{k})$？

对于$k=3$,陈都（chendu）在东论上有很好的总结，供大家参考

1826 年，几何大师 Steiner 提出了如下

问题 1．在三角形的无数个外接椭圆中,哪一个的面积最小？

问题 2．在三角形的无数个内切椭圆中,哪一个的面积最大？

答案　三角形面积最小的外接椭圆，叫做外接 Steiner 椭圆，其最小面积为 4π△/（√27）；三角形面积最大的内切椭圆，叫做内切 Steiner 椭圆，其最大面积为 π△/（√27）．这两个椭圆以该三角形的重心为中心位似（k=2）．（△为△ABC 的面积）

推论　 以△ABC 为底面的直三棱柱的正三角形截面与底面的夹角为 Φ，该三角形的 Steiner 椭圆短轴上的顶点对二焦点的张角为 θ，则 θ=2Φ．

并给出下面有趣的结论：

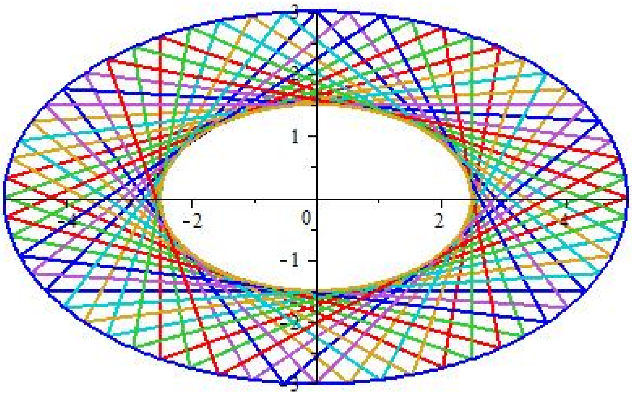
设ΔABC的三边长为a,b,c,面积为Δ，记$e^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\Delta}{2}$

$f^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta}{2}$,则该三角形面积最小的外接椭圆和面积最大的内切椭圆共轴位似且它们的离心率为$\dfrac{2\sqrt{ef}}{e+f}$

定理 C1： 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 面积最大的的内接三角形有无数个，其最大面积 $S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}ab}{4}$，这些面积最大的内接三角形的重心为椭圆的中心，且外切于一个与原椭圆同心共轴并相似（相似比为 1/2）的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{4}$，外接椭圆恰为这些三角形的外接 Steiner 椭圆，内切椭圆恰为这些三角形的内切 Steiners 椭圆。

定理 C2： 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 面积最小的的外切三角形有无数个，其最小面积 $S_{\max}=3\sqrt{3}ab$，这些面积最小的外切三角形的重心为椭圆的中心，且外接于一个与原椭圆

同心共轴并相似（相似比为 2）的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$，内切椭圆恰为这些三角形的内切 Steiner 椭圆，外接椭圆恰为这些三角形的外接 Steiners 椭圆。



对于一般的 k 边形有如下定理成立：

定理 C3：内接于椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的最大面积 k 边形有无数个，其面积均为

$S(k)=\frac{kab\sin(\frac{2\pi}{k})}{2}$，若其中一个顶点坐标为 $[a\cos(t),b\sin(t)]$，则相邻顶点的坐标必为 $[a\cos(t+\frac{2\pi}{k}),\mathrm{b}\sin(t+\frac{2\pi}{k})]$，这些面积最大的 k 边形外切于一个与 C_1 相似的椭圆

$C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos(\frac{\pi}{k})^2$

定理 C4：外切于椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的最大面积 k 边形有无数个，其面积均为

$S(\mathrm{k})=kab\tan(\frac{\pi}{k})$，若其中一个顶点坐标为 $[a\cos(t),b\sin(t)]$，则相邻顶点的坐标必为 $[a\cos(t+\frac{2\pi}{k}),\mathrm{b}\sin(t+\frac{2\pi}{k})]$，这些面积最大的 k 边形外切于一个与 C_1 相似的椭圆

$C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{k})^2}$

问题 1：若已知最大面积的内接三角形 ABC 的三边分别为a,b,c 求椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ ？

我们得到：
$$m=\frac{\sqrt{a^2+b^2++c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}}{3}$$
$$n=\frac{\sqrt{a^2+b^2++c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}}{3}$$

问题 2：若已知最大面积的外切三角形 ABC 的三边分别为a,b,c,求椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ ？

我们得到：
$$m=\frac{\sqrt{a^2+b^2++c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}}{6}$$
$$n=\frac{\sqrt{a^2+b^2++c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}}{6}$$

问题 3：对于双椭圆（内接和外切)的四边形 ABCD(四边依次为a,b,c,d),存在的条件？设内

接椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$

$$a=c,b=d,a^2+b^2=c^2+d^2=2(m^2+n^2)$$

定理 C5: 对于双椭圆（内接和外切)的k 边形(k边长依次为$a_1,a_2,a_3,..,a_k$),存在的条件？

设内接椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$，则必有下列方程成立

$$m^2(\cos(t)-\cos(t+\frac{2\pi}{k}))^2+n^2(\sin(t)-\sin(t+\frac{2\pi}{k}))^2={a_1}^2$$
$$m^2(\cos(t+\frac{2\pi}{k})-\cos(t+\frac{4\pi}{k}))^2+n^2(\sin(t+\frac{2\pi}{k})-\sin(t+\frac{4\pi}{k}))^2={a_2}^2$$
$$m^2(\cos(t+\frac{4\pi}{k})-\cos(t+\frac{6\pi}{k}))^2+n^2(\sin(t+\frac{4\pi}{k})-\sin(t+\frac{6\pi}{k}))^2={a_3}^2$$
......
$$m^2(\cos(t+\frac{2(\mathrm{k}-1)\pi}{k})-\cos(t))^2+n^2(\sin(t+\frac{2(k-1)\pi}{k})-\sin(t))^2={a_k}^2$$

针对椭圆内接三边形最大面积问题，我们来欣赏一下邓寿才（网络上曾流传的农民数学家）给出了利用代数不等式证明的方法：

设椭圆内接三角形的三个顶点坐标分别为

$A[\mathrm{mcos}(\mathrm{t}_1), n\sin(t_1)], \mathrm{B}[\mathrm{mcos}(\mathrm{t}_2), n\sin(t_2)], \mathrm{C}[\mathrm{mcos}(\mathrm{t}_3), n\sin(t_3)]$,

则 AB 直线方程：$n(\sin(t_2)-\sin(t_1))x-\mathrm{m}(\cos(t_2)-\cos(t_1))\,\mathrm{y}+\mathrm{mnsin}(t_1-t_2)=0$

$$\left|AB\right|=\sqrt{m^2(\cos(t_1)-\cos(t_2))^2+n^2(\sin(t_1)-\sin(t_2))^2}$$

设 $t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$，设三角形面积为 S

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}mn\left|\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)\right|\\
&\le mn\left|\sin(t)(1-\cos(t))\right|\\
&\le\sqrt{\frac{1}{3}(mn)^2(3+3\cos(t))(1-\cos(t))^3}\\
&\le\sqrt{\frac{1}{3}(mn)^2(\frac{3+3\cos(t)+3(1-\cos(t))}{4})^4}\\
&=\frac{3\sqrt{3}mn}{4}
\end{aligned}$$

仅当 $t_2=t_1+\dfrac{2\pi}{3}, t_3=t_2+\dfrac{2\pi}{3}$ 时取等号

最后我们来讨论下面问题：

已知椭圆：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ ，求内接于椭圆的等 k 边形的表达式？（设边长为 a ）

此问题很容易得到下列代数方程，设 k 边形的各个顶点坐标依次为

$A_i[m\cos(\theta_i), n\sin(\theta_i)], 1\le i\le k, \theta_{i+1}\ge\theta_i$, 且记 $\theta_{k+1}=\theta_1$

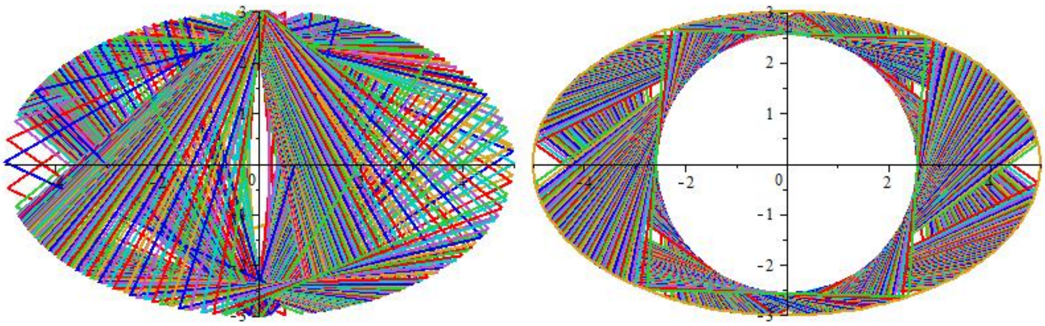
$$\begin{aligned}
&m^2(\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1))^2+n^2(\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1))^2=a^2\\
&m^2(\cos(\theta_3)-\cos(\theta_2))^2+n^2(\sin(\theta_3)-\sin(\theta_2))^2=a^2\\
&m^2(\cos(\theta_4)-\cos(\theta_3))^2+n^2(\sin(\theta_4)-\sin(\theta_3))^2=a^2\\
&\ldots\ldots.\\
&m^2(\cos(\theta_k)-\cos(\theta_1))^2+n^2(\sin(\theta_k)-\sin(\theta_1))^2=a^2
\end{aligned}$$

此问题的重点在于计算上面方程，即消元 $\theta_2,\theta_3,\ldots.,\theta_k$

对于 k=3,我们通过消元得到,设起点 $A[\mathrm{m}\cos(\mathrm{t}),\mathrm{n}\sin(\mathrm{t})]$

$$-2048m^4n^4(108m^8cos(2t)-81m^8-27m^8cos(4t)+168m^6n^2cos(2t)-228m^6n^2+60m^6n^2cos(4t)+ 490m^4n^4-66m^4n^4cos(4t)-228m^2n^6+60m^2n^6cos(4t)-168m^2n^6cos(2t)-27n^8cos(4t)-108n^8cos(2t)- 81n^8)a^2+[1536m^2n^2(m-n)(m+n)(-27m^8+27m^8cos(2t)-186m^6n^2+36m^6n^2cos(2t)+130n^4cos(2t)m^4+ 36m^2n^6cos(2t)+[186m^2n^6+27n^8cos(2t)+27n^8)a^4+576(m-n)^2(m+n)^2(n^2+3m^2)^2(3n^2+m^2)^2a^6+ 24576m^6n^6(m^6cos(6t)-6m^6cos(4t)+15m^6cos(2t)-10m^6+6m^4n^2cos(4t)-6m^4n^2-3m^4n^2cos(6t)+ 3m^4n^2cos(2t)+3m^2n^4cos(6t)-6m^2n^4-3m^2n^4cos(2t)+6m^2n^4cos(4t)-n^6cos(6t)-6n^6cos(4t)- 15n^6cos(2t)-10n^6)=0$$

下面为利用 MAPLE 通过数值计算得到的图形



对于 $k=3$,cresson 利用仿射几何方法得到如下有趣简洁结论：

$$2\pi=\arccos\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m^2}\cos(\theta)^2+\frac{a^2}{n^2}\sin(\theta)^2\right)\right\}+\arccos\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m^2}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})^2+\frac{a^2}{n^2}\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})^2\right)\right\}$$
$$+\arccos\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m^2}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})^2+\frac{a^2}{n^2}\sin(\theta+\frac{4\pi}{3})^2\right)\right\}$$

对于 $k=4$,hujunhua 得到了如下结论：

$$a=\sqrt{\frac{((\mathrm{m}\cos(\theta))^2+(n\sin(\theta))^2)(\mathrm{m}^6(\cos(\theta))^2+n^6(\sin(\theta))^2)}{\mathrm{m}^4(\cos(\theta))^2+n^4(\sin(\theta))^2}}\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}$$

对于 $k\geq 5$，我们没有得到最终答案，我们期待有人完全给出一般情形的精确表达式。

参考链接：

1. [讨论] 诡异的椭圆定理

   http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=4216

2. [提问] 椭圆内接N边形的最大面积

   http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=4267

3. [原创] 椭圆内接N等边及N等角凸边形问题

   http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=4289

4. [转载] 椭圆内接n边形周长最大值

   http://bbs.emath.ac.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=3740