

# 德州扑克双人 All-in 打法的最佳策略

KeyTo9\_Fans

2013-12-03

## 引言

德州扑克[1]是玩家对玩家的公共牌类游戏。虽然该游戏的输赢具有运气成分，但因技巧性强吸引了国内外众多玩家的参与。该游戏只使用一副牌中的 52 张牌（去掉了鬼牌）。游戏开始时，每个玩家各分得 2 张底牌（其他玩家看不到的牌）。接下来有 5 张公共牌（所有玩家都能看到的牌）陆续发出。然后每个玩家从 7 张牌（自己的底牌加上 5 张公共牌）中任选 5 张牌作为自己的手牌。每张公共牌都可以被任意多个玩家同时选用。最后根据比牌规则[1]，手牌最大的玩家获胜。

德州扑克有很多种玩法，本文讨论的是 2 个玩家的 All-in 打法。在 All-in 打法中，2 个玩家的目标都是赢得对方尽可能多的钱。

## 问题描述

2 个玩家进行德州扑克的 All-in 打法。该游戏要进行  $2N$  轮（ $N$  趋于正无穷）。在  $2N$  轮游戏中，2 个玩家轮流当先手方和后手方（即每个玩家都有  $N$  轮当先手方， $N$  轮当后手方）。每轮开始时，2 个玩家从 52 张牌中各分得 2 张随机的底牌（此时剩余 48 张牌）。然后先手方根据自己拿到的底牌，选择 All-in 或者放弃。如果先手方选择放弃，那么先手方损失 1 块钱，后手方赢得 1 块钱，本轮结束；如果先手方选择 All-in，那么后手方根据自己的底牌，选择跟随或者放弃。如果后手方选择放弃，那么后手方损失 2 块钱，先手方赢得 2 块钱，本轮结束；如果后手方选择跟随，那么在剩余的 48 张牌中，会随机选出 5 张牌作为公共牌。然后双方从公共牌和自己的底牌中选出 5 张牌作为自己的手牌。最后，根据比牌规则[1]，手牌大的玩家赢得 400 块钱，手牌小的玩家损失 400 块钱。如果双方的手牌一样大，那么双方都没有盈亏。

如果 2 个玩家都想赢得对方尽可能多的钱，他们会采取怎样的策略进行游戏呢？

## 策略模型

我们假设双方都采取最佳的赢钱策略进行游戏。因为 2 个玩家在  $2N$  轮游戏中的地位是平等的，并且资产总和不变，所以双方在最佳策略下所赢钱数的期望值都是 0。但先手方和后手方的地位是不同的，我们应该分别给出先手方的策略和后手方的策略，以及先手方和后手方在最佳策略下每轮的期望盈亏。

由于  $N$  趋于正无穷，所以双方都很容易知道对方所用策略的统计信息。具体的统计信息如下所述。

### 1、底牌的种类数

从 52 张牌中任选 2 张牌，一共有  $C(52, 2)=1326$  种选取方案，每种选取方案对应一种底牌。但由于比牌的时候只比点数不比花色，很多底牌是等价的。我们将等价的底牌视为同一种底牌，于是只有 169 种底牌，可以分成如下 3 大类。

- (1) 13 种对子：AA、KK、QQ、JJ、TT（T 表示 10）、99、88、77、66、55、44、33、22；
- (2) 78 种同花散牌：AK、AQ、AJ、AT、A9、A8、……、A2、KQ、KJ、……、43、42、32；
- (3) 78 种异花散牌：点数同上。

### 2、先手方的策略

先手方根据自己拿到的底牌，选择 All-in 或者放弃。我们用 169 个参数  $p_0$ 、 $p_1$ 、……、 $p_{168}$  来描述先手方的策略。这些参数的含义如下：

如果拿到 AA，那么选择 All-in 的概率是  $p_0$ ，选择放弃的概率是  $(1-p_0)$ ；

如果拿到 KK，那么选择 All-in 的概率是  $p_1$ ，选择放弃的概率是  $(1-p_1)$ ；

……

如果拿到 22，那么选择 All-in 的概率是  $p_{12}$ ，选择放弃的概率是  $(1-p_{12})$ ；

如果拿到同花 AK，那么选择 All-in 的概率是  $p_{13}$ ，选择放弃的概率是  $(1-p_{13})$ ；

如果拿到异花 AK, 那么选择 All-in 的概率是  $p_{14}$ , 选择放弃的概率是  $(1-p_{14})$ ;  
如果拿到同花 AQ, 那么选择 All-in 的概率是  $p_{15}$ , 选择放弃的概率是  $(1-p_{15})$ ;  
如果拿到异花 AQ, 那么选择 All-in 的概率是  $p_{16}$ , 选择放弃的概率是  $(1-p_{16})$ ;  
.....

如果拿到同花 32, 那么选择 All-in 的概率是  $p_{167}$ , 选择放弃的概率是  $(1-p_{167})$ ;  
如果拿到异花 32, 那么选择 All-in 的概率是  $p_{168}$ , 选择放弃的概率是  $(1-p_{168})$ 。

### 3、后手方的策略

如果先手方选择 All-in, 那么后手方根据自己的底牌, 选择跟随或者放弃。我们用 169 个参数  $q_0$ 、 $q_1$ 、.....、 $q_{168}$  来描述后手方在先手方选择 All-in 时的策略。这些参数的含义如下:

如果拿到 AA, 那么选择跟随的概率是  $q_0$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_0)$ ;  
如果拿到 KK, 那么选择跟随的概率是  $q_1$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_1)$ ;  
.....

如果拿到 22, 那么选择跟随的概率是  $q_{12}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{12})$ ;  
如果拿到同花 AK, 那么选择跟随的概率是  $q_{13}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{13})$ ;  
如果拿到异花 AK, 那么选择跟随的概率是  $q_{14}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{14})$ ;  
如果拿到同花 AQ, 那么选择跟随的概率是  $q_{15}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{15})$ ;  
如果拿到异花 AQ, 那么选择跟随的概率是  $q_{16}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{16})$ ;  
.....

如果拿到同花 32, 那么选择跟随的概率是  $q_{167}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{167})$ ;  
如果拿到异花 32, 那么选择跟随的概率是  $q_{168}$ , 选择放弃的概率是  $(1-q_{168})$ 。

## 过程和结果

我们根据上述策略模型, 按照如下步骤进行求解。

### 1、生成盈亏表

如果先手方选择了 All-in, 后手方选择了跟随, 那么我们要根据比牌规则决定双方的输赢。我们首先写了一个 C++ 程序来枚举双方的底牌和公共牌, 统计双方底牌的种类已知的情况下, 双方根据比牌规则决出胜负所产生的盈亏的期望值。统计结果经可视化处理后, 如图 1 所示。

从图 1 我们可以看到, 总体的盈亏情况是对子赢散牌, 大对子赢小对子, 大散牌赢小散牌; 当点数相同时, 同花牌赢非同花牌。

### 2、寻找纳什均衡点

得到盈亏表之后, 我们写了第二个 C++ 程序。该程序读入盈亏表, 然后根据策略模型, 寻找能够通过纳什均衡检验的参数值。根据纳什均衡理论 [2], 能够通过纳什均衡检验的参数值是唯一的。解得该组参数值如下:

$p_0=p_1=p_2=p_{13}=p_{14}=p_{15}=p_{19}=p_{29}=p_{31}=1$ ,  $p_4=0.200660$ ,  $p_{33}=0.027392$ ;

$q_0=q_1=q_{13}=1$ ,  $q_2=0.756939$ ,  $q_{14}=0.561953$ ;

其余参数为 0。

### 3、结果解释

根据程序求解的结果, 先手方的策略如下: 如果拿到 AA、KK、QQ、AK、同花 AQ、同花 AT、同花 A5、同花 A4, 那么选择 All-in; 如果拿到 TT, 以 20.0660% 的概率 All-in; 如果拿到同花 A3, 以 2.7392% 的概率 All-in; 其余情况选择放弃。平均 All-in 概率为 3.8698%。

后手方的策略如下: 如果拿到 AA、KK、同花 AK, 那么选择跟随; 如果拿到 QQ, 那么以 75.6939% 的概率跟随; 如果拿到异花 AK, 那么以 56.1953% 的概率跟随; 其余情况选择放弃。平均跟随概率为 2.0577%。

于是先手方每轮赢钱数的期望值是 -0.93074885, 后手方每轮赢钱数的期望值是 0.93074885。

双方最终会采取上述策略是因为上述策略通过了纳什均衡检验。也就是说, 上述策略具有以下特点:

(1) 后手方的策略是最佳的:

先手方即使知道了该策略, 先手方每轮赢钱数的期望值也不可能大于 -0.93074885;

(2) 先手方的策略也是最佳的:

后手方即使知道了该策略, 后手方每轮赢钱数的期望值也不可能大于 0.93074885。

根据纳什均衡理论 [2], 这样的策略是唯一的。我们通过编程找到了该策略, 并且验证了以上特性。

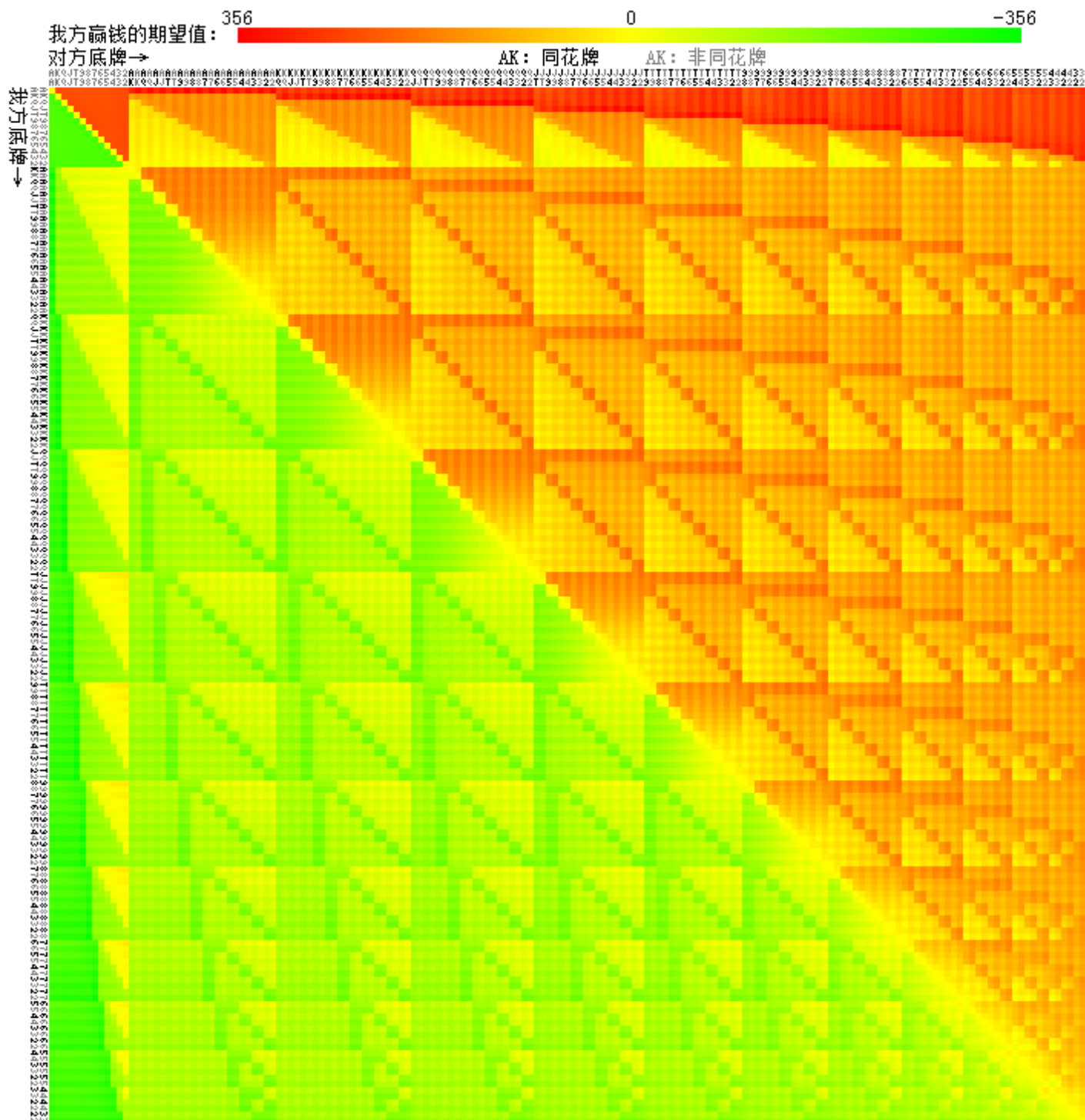


图 1: 双方根据比牌规则决出胜负所产生的盈亏的期望值

## 总结与展望

德州扑克双人 All-in 打法是一个策略空间有界且维数比较小（只有  $[0, 1]^{338}$  那么大）的双人矩阵博弈。我们通过编程，找到了策略空间中的纳什均衡点。但德州扑克最流行的打法是自由下注打法，而先手方在 All-in 打法的纳什均衡点是亏钱的，因此我们求解出来的策略还不能用在自由下注的打法中。在自由下注打法中，下注额是 0 到正无穷大的实数；一个玩家下注后，其余玩家还可以选择加注；并且在看到部分公共牌的时候还要进行新一轮的下注。因此求解德州扑克自由下注打法的最佳策略将面临以下挑战。

- 1、我们的程序只能寻找有界空间中的纳什均衡点。而自由下注打法的策略空间是无界的。
- 2、我们的程序只能寻找维数较小的策略空间中的纳什均衡点。而自由下注打法要在看到一部分公共牌的时候进行新一轮的下注。公共牌的种类非常多，因此策略空间的维数急剧增加。我们的程序暂时无法求解维数非常大的策略空间中的纳什均衡点。

我们今后将寻找更普适的求解方案，迎接以上挑战，并期待与对该问题感兴趣的读者交流。

## 参考文献

- [1] <http://baike.baidu.com/subview/947708/11120640.htm>
- [2] <http://baike.baidu.com/view/28460.htm>